УДК 517.95

О. В. Новикова

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрено нелинейное комплекснозначное уравнение в частных производных. К данному уравнению применены некоторые способы нахождения точных решений, присущие уравнениям с солитоноподобными решениями. В частности, проведено исследование уравнения на наличие свойства Пенлеве, найдены решения в виде рядов Лорана, точные решения в виде бегущих волн и решения, полученные методом Хироты.

Several ways of finding of the exact solutions inherent in the equations with soliton like solutions were applied to the given equation. In particular the presence of property of Penleve in the equation was conducted, solutions in the form of numbers of Lorana, exact solutions in the form of running waves and solutions received by the method of Hiroty were found.

Ключевые слова: свойство Пенлеве, особые точки, полюсные особенности, ряд Лорана, метод Хироты, бегущие волны.

Key words: property of Penleve, special points, polar pecularities, a number of Lorana, a method of Hiroty, running waves.

Свойство Пенлеве заключается в отсутствии подвижных критических точек у решений дифференциальных уравнений. Особенности называются неподвижными, если их расположение не зависит от постоянных интегрирования. К критическим особым точкам относятся точки ветвления (алгебраические и логарифмические) и точки существенных особенностей. Это означает, что от произвольных постоянных интегрирования может зависеть только положение полюсов. Большинство нелинейных дифференциальных уравнений не обладает этим свойством. Нелинейные уравнения в частных производных могут иметь как подвижные, так и неподвижные особые точки. Уравнения же солитонного типа обладают свойством Пенлеве.

Для исследования вопроса, имеет ли уравнение

$$\overline{p}_t - ip_{xx} + 2ip\left(p^2 + \overline{p}^2\right) = 0 \tag{1}$$

подвижные критические точки, воспользуемся методом, описанным Абловицем, Рамани и Сегуром [1]. Так как уравнение (1) описывает поведение комплексной функции, то выделим действительную и мнимую части, т. е. представим ее в виде $p(x,t) = u(x,t) + iv(x,t)$; тогда уравнение после отделения действительной и мнимой частей примет вид системы уравнений в частных производных на две действительные функции

$$\begin{cases} u_t + v_{xx} - 4v\left(u^2 - v^2\right) = 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u\left(u^2 - v^2\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Подставив в исходную систему уравнений заданные оценки, получим, что старшие степени будут совпадать при нескольких вариантах, если

$$\begin{cases} -3M = -M - 2N = -M - 2, \\ -3N = -N - 2M = -N - 2; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -3N = -N - 2, \\ -N - 1 = -M - 2N, \\ -M - 1 = -N - 2M, \end{cases} \tag{4}$$

и в силу симметрии системы (2) возможен также случай, когда выполняются равенства

$$\begin{cases} -3M = -M - 2, \\ -N - 1 = -M - 2N, \\ -M - 1 = -N - 2M, \end{cases} \tag{5}$$

откуда первый вариант дает $N = M = 1$; второй определяет следующие значения: $M = 0$, $N = 1$; третий — $N = 0$, $M = 1$. Если бы N или M не являлись целыми, то мы получили бы алгебраическую точку ветвления и система уравнений (2) не обладала бы свойством Пенлеве.

Вывод: в случае (3) и функция $u(x,t)$, и $v(x,t)$ имеют особенность в виде полюса первого порядка; в случае (4) $u(x,t)$ имеет полюс первого порядка, а функция $v(x,t)$ не имеет особенностей и представляет собой простой ряд Тейлора; в случае (5) $v(x,t)$ имеет полюс первого порядка, а функция $u(x,t)$ не имеет особенностей.

Рассмотрим первый случай.

Теорема 1. *Система уравнений (2) обладает свойством Пенлеве и имеет решение в виде рядов Лорана с полюсом первого порядка:*

$$u(x,t)=\sum_{n=-1}^{\infty}a_n(t)\xi^n,\quad v(x,t)=\sum_{n=-1}^{\infty}b_n(t)\xi^n, \tag{6}$$

где $\xi=x-\varsigma(t)$, $b_{-1}(t)$, $a_2(t)$ *– произвольные функции;*

$$a_{-1}(t)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2},\quad b_0(t)=\pm\frac{1}{2}\varsigma'\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2},\quad a_0(t)=\frac{1}{2}\varsigma' b_{-1},$$

$$a_1(t)=\frac{b_{-1}'}{6}\pm\frac{(\varsigma')^2}{12}\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2},\quad b_1(t)=\frac{(\varsigma')^2}{12}b_{-1}\pm\frac{b_{-1}'b_{-1}}{6\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2}},$$

$$b_2=\pm\frac{a_2}{b_{-1}}\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2}-\frac{\varsigma''}{16b_{-1}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентными формулами.

Доказательство. Так как система уравнений (2) имеет два уравнения второго порядка, то общее решение должно зависеть от трех произвольных функций, играющих роль постоянных интегрирования. Определим, при каких степенях могут возникнуть произвольные функции. Положим $u\sim a_{-1}\xi^{-1}+a_{r-1}\xi^{r-1}$, $v\sim b_{-1}\xi^{-1}+b_{r-1}\xi^{r-1}$, тогда система (2) даст следующие соотношения для высшей степени ξ^{-3}:

$$\begin{cases}2b_{-1}-4b_{-1}\left(a_{-1}^2-b_{-1}^2\right)=0,\\ 2a_{-1}-4a_{-1}\left(a_{-1}^2-b_{-1}^2\right)=0,\end{cases} \tag{7}$$

что дает значение для старшего коэффициента

$$a_{-1}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2(t)}, \tag{8}$$

где $b_{-1}(t)$ – произвольная функция. Коэффициенты при ξ^{r-3} удовлетворяют равенствам:

$$\begin{cases}(r-1)(r-2)b_{r-1}-4\left[2b_{-1}a_{-1}a_{r-1}+b_{r-1}a_{-1}^2-3b_{r-1}b_{-1}^2\right]=0,\\ (r-1)(r-2)a_{r-1}+4\left[2b_{-1}a_{-1}b_{r-1}+a_{r-1}b_{-1}^2-3a_{r-1}a_{-1}^2\right]=0.\end{cases} \tag{9}$$

Выполним подстановку значения (8) в полученную систему (9), тогда

$$\begin{cases}\left[(r-1)(r-2)-2\right]b_{r-1}=8b_{-1}\left(a_{-1}a_{r-1}-b_{-1}b_{r-1}\right),\\ \left[(r-1)(r-2)-2\right]a_{r-1}=8a_{-1}\left(a_{-1}a_{r-1}+b_{-1}b_{r-1}\right).\end{cases} \tag{10}$$

Умножим первое равенство системы на a_{-1}, а второе на b_{-1}, тогда получим равенство $[(r-1)(r-2)-2](b_{r-1}a_{-1}-a_{r-1}b_{-1})=0$, которое выполняется тождественно, если r является корнем алгебраического уравнения. Определим положительные корни $r=0;\,3$, тогда — с учтем поправки на наивысшую степень — получим степени: –3; 0, при которых возникают произвольные коэффициенты. Выполнив преобразования в системе и используя ранее найденное значение для a_{-1} в виде (8), получим следующие значения коэффициентов

$$b_0(t) = \pm\frac{1}{2}\varsigma'\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2}, \quad a_0(t) = \frac{1}{2}\varsigma' b_{-1}. \tag{11}$$

$$n=-1: \quad \begin{cases} a'_{-1} = 4\left[2a_{-1}\left(b_{-1}a_1+b_0a_0\right)+b_1\left(a_{-1}^2-3b_{-1}^2\right)+b_{-1}\left(a_0^2-3b_0^2\right)\right]=0, \\ b'_{-1} = 4\left[a_1\left(3a_{-1}^2-b_{-1}^2\right)+a_{-1}\left(3a_0^2-b_0^2\right)-2b_{-1}\left(a_{-1}b_1+b_0a_0\right)\right]=0. \end{cases}$$

Отделяя переменную a_1 от b_1, получим однозначное определение этих функций в виде:

$$a_1(t) = \frac{b'_{-1}}{6} \pm \frac{(\varsigma')^2}{12}\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2}, \quad b_1(t) = \frac{(\varsigma')^2}{12}b_{-1} \pm \frac{b_{-1}b'_{-1}}{6\sqrt{1/2+b_{-1}^2}}, \tag{12}$$

$$n=0: \quad \begin{cases} a'_0 - a_1\varsigma' + 2b_2\left(1-2a_{-1}^2+6b_{-1}^2\right) = 8\left[b_{-1}a_{-1}a_2 + \right. \\ \left. + b_{-1}\left(a_0a_1-3b_0b_1\right)+a_{-1}\left(a_0b_1+b_0a_1\right)\right]+4\left(b_0a_0^2-b_0^3\right), \\ b'_0 - b_1\varsigma' + 2a_2\left(1-6a_{-1}^2+2b_{-1}^2\right) = 8\left[a_{-1}\left(3a_0a_1-b_0b_1\right)- \right. \\ \left. - b_{-1}a_{-1}b_2 - b_{-1}\left(b_0a_1+a_0b_1\right)\right]-4\left(a_0b_0^2-a_0^3\right). \end{cases}$$

Если из первого равенства выразить b_2 и подставить во второе соотношение системы, то после подстановки ранее найденных значений оно выполняется тождественно; следовательно, $a_2(t)$ остается произвольной функцией, а

$$b_2(t) = \pm\frac{a_2}{b_{-1}}\sqrt{\frac{1}{2}+b_{-1}^2} - \frac{\varsigma''}{16b_{-1}}. \tag{13}$$

Для n-й степени ξ:

$$\begin{gathered} a'_n - (n+1)a_{n+1}\varsigma' + (n+2)(n+1)b_{n+2} = \\ = 4\sum_{j=-1}^{n+2} b_j \sum_{k=-1}^{n+2-j}\left(a_k a_{n+2-j-k} - b_k b_{n+2-j-k}\right); \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} b'_n - (n+1)b_{n+1}\varsigma' + (n+2)(n+1)a_{n+2} = \\ = 4\sum_{j=-1}^{n+2} a_j \sum_{k=-1}^{n+2-j}\left(a_k a_{n+2-j-k} - b_k b_{n+2-j-k}\right). \end{gathered} \tag{15}$$

В результате функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ имеют локальное разложение, которое может быть записано в виде рядов Лорана с тремя произвольными функциями от t: $\varsigma(t), b_{-1}(t), a_2(t),$ следовательно, свойство Пенлеве для системы уравнений (2) выполняется. Теорема доказана.

Теорема 2. *Система уравнений (2) обладает свойством Пенлеве и имеет решение в виде рядов Лорана с полюсом первого порядка*

$$u(x,t) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(t)\xi^n, \quad v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)\xi^n, \tag{16}$$

где $\xi = x - \varsigma(t), \varsigma(t), b_2(t), a_3(t)$ *– произвольные функции;*

$$a_{-1}(t)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad b_0(t)=\pm\frac{\varsigma'}{2\sqrt{2}},\quad a_0(t)=0,\quad a_1(t)=\pm\frac{(\varsigma')^2}{12\sqrt{2}},\quad b_1(t)=0,$$

$$a_2(t)=\pm\frac{\varsigma''}{8\sqrt{2}},\quad b_3(t)=\pm\frac{\varsigma'\varsigma''}{12\sqrt{2}},$$

остальные коэффициенты определяются рекуррентными формулами

$$a_{n+2}=\frac{1}{n^2+3n-4}\left(4a_{-1}\sum_{j=0}^{n+1}\left(3a_j a_{n+1-j}-b_j b_{n+1-j}\right)-b_n'+\right.$$

$$\left.+(n+1)b_{n+1}\varsigma'+4\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{k=0}^{n-j}\left(a_k a_{n-j-k}-b_k b_{n-j-k}\right)\right);\tag{17}$$

$$b_{n+2}=\frac{1}{n^2+3n}\left(8a_{-1}\sum_{j=0}^{n+1}a_j b_{n+1-j}-a_n'+(n+1)a_{n+1}\varsigma'+\right.$$

$$\left.+4\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{n-j}\left(a_k a_{n-j-k}-b_k b_{n-j-k}\right)\right).\tag{18}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Алгоритм метода Хироты состоит в следующем.

1. Произвести замену зависимой переменной так, чтобы уравнение имело билинейную функцию.
2. Рассматривать формальные ряды теории возмущений.
3. Построить N-солитонные решения.

Теорема 3. *Нелинейное уравнение в частных производных* (1) *имеет решение в виде*

$$p(x,t)=\frac{b_1\alpha_1^2\left[c_0(1+i)-c_1e^{\alpha_1x+\alpha_1^2t}(1-i)\right]}{8c_0c_1+b_1^2\alpha_1^2e^{\alpha_1x+\alpha_1^2t}},\tag{19}$$

где $p(x,t)$ – комплекснозначная функция; c_0, c_1, b_1, α_1 – произвольные постоянные.

Доказательство. Выполним в системе уравнений (2) замену функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ на частное двух функций:

$$u(x,t)=\frac{R(x,t)}{Q(x,t)},\quad v(x,t)=\frac{W(x,t)}{Q(x,t)}\tag{20}$$

и подставим соответствующие производные этих функций в данную систему. Используем оператор дифференцирования Хироты [2], определенный на упорядоченной паре функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$ следующим образом:

$$D_x\sigma\circ\tau=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sigma(x+\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)=\sigma_x\tau-\sigma\tau_x,$$

где символом «$\circ$» обозначается упорядоченное произведение двух функций $\sigma(x)$, $\tau(x)$. Тогда производные перепишем в виде:

$$D_tR\circ Q=R_tQ-Q_tR,\quad D_tW\circ Q=W_tQ-Q_tW,\quad D_x^2Q\circ Q=2Q_{xx}Q-2Q_x^2,$$

$$D_x^2R\circ Q=R_{xx}Q-2R_xQ_x+Q_{xx}R,\quad D_x^2W\circ Q=W_{xx}Q-2W_xQ_x+Q_{xx}W.$$

Так как при подстановке (20) общий знаменатель в системе (2) имеет вид Q^3, то запишем только числитель:

$$\begin{cases}QD_tR\circ Q-WD_x^2Q\circ Q+QD_x^2W\circ Q-4W\left(R^2-W^2\right)=0,\\ QD_tW\circ Q-RD_x^2Q\circ Q+QD_x^2R\circ Q-4R\left(R^2-W^2\right)=0.\end{cases}$$

Данная система распадается на три уравнения:

$$\begin{cases}D_tR\circ Q+D_x^2W\circ Q=0,\\ D_tW\circ Q+D_x^2R\circ Q=0,\\ D_x^2Q\circ Q+4\left(R^2-W^2\right)=0.\end{cases}\tag{21}$$

Представим функции *R*, *W*, *Q* в виде рядов

$$R=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}R_j,\quad R_j=\sum_{m=1}^{N}a_me^{\gamma_m},\quad \gamma_j=k_j\left(\alpha_jx+\beta_jt\right),$$

$$W=c_0+\sum_{j=1}^{\infty}W_j,\quad W_j=\sum_{m=1}^{N}c_me^{\sigma_m},\quad \sigma_j=\tau_j\left(\alpha_jx+\beta_jt\right),$$

$$Q=b_0+\sum_{j=1}^{\infty}Q_j,\quad Q_j=\sum_{m=1}^{N}b_me^{\theta_m},\quad \theta_j=g_j\left(\alpha_jx+\beta_jt\right),$$

где $a_0,\ b_0,\ c_0,\ a_j,\ b_j,\ c_j,\ \alpha_j,\ \beta_j,\ k_j,\ \tau_j,\ g_j-\mathrm{const}$.

В методе Хироты предполагается, что ряды можно обрывать и, определяя связь между имеющимися параметрами, получить точное решение исходной системы. Рассмотрим простейший случай, когда $N=1$:

$$R=a_0+a_1e^{\gamma_1},\quad W=c_0+c_1e^{\sigma_1},\quad Q=b_0+b_1e^{\theta_1}.\tag{22}$$

Определив соответствующие производные этих функций и подставив их в систему (21), найдем, что одной из возможных связей между аргументами показательных функций является случай, когда $\theta_1=\sigma_1=\gamma_1$. При этом предположении для того, чтобы система (21) выполнялась тождественно, необходимо наложить следующие условия на коэффициенты: $a_0=c_0,\ a_1=-c_1,\ b_0=\dfrac{8c_0c_1}{b_1\alpha_1^2},\ \beta_1=\alpha_1^2,\ c_0,\ c_1,\ b_1,\ \alpha_1$ – произвольные постоянные. Выполнив подстановку найденных значений в равенства (22) и (20), найдем функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Таким образом, частное решение уравнения (1) примет вид (20).

Теорема 4. *Нелинейное уравнение в частных производных* (1) *имеет частные решения в виде бегущих волн*

$$\begin{gathered}p(x,t)=\mathrm{sh}\left(\alpha x-\left(4+\alpha^2\right)t+\delta\right)+i\,\mathrm{ch}\left(\alpha x-\left(4+\alpha^2\right)t+\delta\right),\\ p(x,t)=\mathrm{ch}\left(\alpha x+\left(4-\alpha^2\right)t+\delta\right)+i\,\mathrm{sh}\left(\alpha x+\left(4-\alpha^2\right)t+\delta\right).\end{gathered}\tag{23}$$

Доказательство. Положим $u = \mathrm{sh}\, f(x,t)$, $v = \mathrm{ch}\, f(x,t)$. Подставив функции u и v и их частные производные в систему уравнений (2), получим

$$\begin{cases} \left(f_t' + \left(f_x'\right)^2 + 4\right)\mathrm{ch}\, f + f_{xx}'' \,\mathrm{sh}\, f = 0, \\ \left(f_t' + \left(f_x'\right)^2 + 4\right)\mathrm{sh}\, f + f_{xx}'' \,\mathrm{ch}\, f = 0. \end{cases} \qquad (24)$$

Система (24) совместна, если выполняется условие $f(x,t) = \alpha x + \beta t + \delta$, где $\beta = -4 - \alpha^2$. Учитывая, что $p = u + iv$, решение примет вид (23).

Рассмотрев случай, когда $u = \mathrm{ch}\, f(x,t)$, $v = \mathrm{sh}\, f(x,t)$, получим второе частное решение.

В результате проведенных исследований доказано выполнение свойства Пенлеве для исследуемого уравнения, найдены его решения в виде рядов Лорана, точные решения в виде бегущих волн и решения, полученные методом Хироты.

Список литературы

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи / пер. с англ. М., 1987.

2. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М., 1989.

Об авторе

Ольга Викторовна Новикова — асп., Ставропольский государственный университет.

E-mail: oly-novikova@yandex.ru

About author

Olga Novikova — PhD student, Stavropol State University.

E-mail: oly-novikova@yandex.ru